

Cours – Séquence n° 2 – RÉCURRENCE : raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est un nouveau type de raisonnement introduit en classe de Terminale Spécialité, extrêmement efficace pour démontrer des propriétés dépendant d'un entier naturel et donc très utilisé avec les suites numériques.

Il est basé sur un axiome (propriété admise), appelé "principe de récurrence" et présenté ci-dessous.



Historiquement, le raisonnement par récurrence a été formalisé comme principe fondamental de raisonnement par Blaise Pascal (mathématicien français du 17^{ème} siècle) et surtout Peano (mathématicien italien du 19^{ème} siècle - *photo*), bien que des raisonnements de type analogue apparaissent déjà dans les *Eléments* d'Euclide (III^{ème} siècle avant notre ère).

Axiome : principe de récurrence

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n .

Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

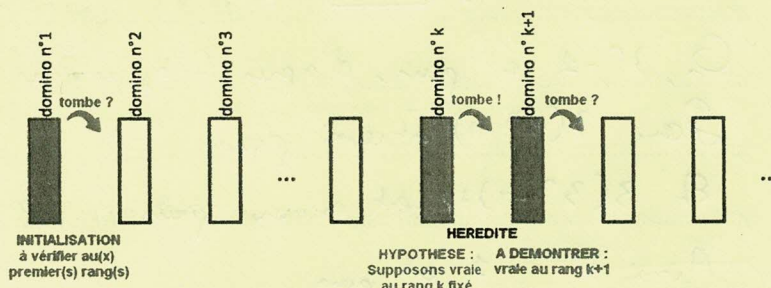
- $P(n_0)$ est vraie, avec n_0 un entier naturel (*condition d'initialisation*)
- Pour tout entier $n \geq n_0$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n + 1)$ est vraie (*condition d'hérédité*)

alors quel que soit $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Illustration

Quelles sont les deux conditions pour que tous les dominos se renversent ?

1. On renverse le 1^{er} domino.
2. On s'assure que chaque domino renverse le suivant.



Méthode du raisonnement par récurrence :

Tout raisonnement par récurrence suit une progression en trois étapes.

On note pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $P(n)$ la propriété sur laquelle porte le raisonnement.

Étape n° 1 : initialisation

On vérifie que $P(n_0)$ est vraie.

Étape n° 2 : hérédité

On vérifie que, si $P(n)$ est vraie à un certain rang $n \geq n_0$ (hypothèse de récurrence), alors $P(n + 1)$ est vraie aussi.

Étape n° 3 : conclusion

On conclut : "D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie."

Remarques

1. On utilise un raisonnement par récurrence lorsqu'une autre démonstration est difficile.
2. La propriété $P(n)$ peut être une égalité, une inégalité, une propriété exprimée par une phrase, ...

Exemple 1

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $3^n - 1$ est un nombre pair.

Démontrons par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 3^n - 1$ est pair

Initialisation:

Si $n = 1$, alors $3^1 - 1 = 2$ qui est pair

Pour la propriété est vraie pour $n = 1$

Hérédité:

Supposons que la propriété soit vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

C'est-à-dire, supposons que $3^n - 1$ est pair et montrons que $3^{n+1} - 1$ est pair.

$$\text{Or, } 3^{n+1} - 1 = 3 \times 3^n - 1$$

$$3^{n+1} - 1 = 3(3^n - 1) + 2$$

Or, $3^n - 1$ est pair, d'après l'hypothèse de récurrence.

Pour $3(3^n - 1)$ est aussi pair

Et $3(3^n - 1) + 2$ est encore pair

Ainsi $3^{n+1} - 1$ est pair

Pour la propriété est vraie au rang $n+1$, elle est donc héréditaire

Conclusion:

D'après le théorème de récurrence,

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 3^n - 1$ est pair

Exemple 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

À l'aide d'un tableur, on a calculé les dix premiers termes de la suite (u_n) .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	u_n	0	1	3	7	15	31	63	127	255	511

Conjecturer une expression de u_n en fonction de n , puis démontrer par récurrence cette conjecture.

Conjecture: Il semble que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n - 1$

Démonstration par récurrence, que: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n - 1$

Initialisation:

Si $n = 0$ ^{de} $u_0 = 0$ et $2^0 - 1 = 0$ Donc $u_0 = 2^0 - 1$

Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$

Hérédité:

Supposons que la propriété soit vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$

C'est-à-dire, supposons qu'à un rang $n \in \mathbb{N}$

$u_n = 2^n - 1$ et montrons $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

On a $u_{n+1} = 2u_n + 1$

$u_{n+1} = 2 \times (2^n - 1) + 1$, d'après l'hypothèse de récurrence

$u_{n+1} = 2^{n+1} - 2 + 1$

$u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$, elle est héréditaire

Conclusion:

D'après le théorème de récurrence:

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n - 1$

Exemple 3

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^n \geq n + 1$. Puis, en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n$.

Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad e^n \geq n+1$

Initialisation :

Si $n = 0$, alors $e^0 = 1$ et $0+1 = 1$. Donc $e^0 \geq 0+1$

Donc la propriété est vraie au rang $n=0$

Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$

C'est-à-dire, supposons qu'à un rang $n \in \mathbb{N}$ $e^n \geq n+1$ et montrons que $e^{n+1} \geq n+2$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence $e^n \geq n+1$

$$\begin{aligned} & \times e \quad e^{n+1} \geq e(n+1) \quad \times e > 0 \\ & e^{n+1} \geq ne + e \geq 2n+2 \geq n+2 \end{aligned}$$

Ainsi $e^{n+1} \geq n+2$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$, elle est héréditaire

Conclusion :

D'après le théorème de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad e^n \geq n+1$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty$

Alors, d'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$$